1) a Geef een basis van $P_n(\mathbb{R})$

Een standaard basis van $P_n(\mathbb{R})$ is $\beta = \{\underbrace{1, x, \cancel{x^2}, \ldots, x^n}_{1+n}\}$

b Bepaal de dimensie van $P_n(\mathbb{R})$

$\dim(P_n(\mathbb{R})) = n+1$

c Laat zien dat $E_n(\mathbb{R})$ een deelruimte is van $P_n(\mathbb{R})$

$P(x) = P(-x)$

Toon aan ① $0 \in E_n(\mathbb{R})$

② $x, y \in E_n(\mathbb{R}) \Rightarrow x+y \in E_n(\mathbb{R})$

③ $\lambda x \in E_n(\mathbb{R}) \quad \forall x \in E_n(\mathbb{R})$ en $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Bewijs ①. $0(x) = 0 = 0(-x) \quad \forall x \in E_n(\mathbb{R})$

Hiermee is ① aangetoond.

②. $x, y \in E_n(\mathbb{R}) \Rightarrow x+y \in E_n(\mathbb{R})$

Neem een willekeurige ~~$x, y \in E_n(\mathbb{R})$~~ $x, y \in E_n(\mathbb{R})$

$x(t) = x(-t) \quad y(t) = y(-t)$

$x(t) + y(t) = (x+y)(t) = (x+y)(-t) = x(-t) + y(-t)$

Hiermee is ② aangetoond.

③. $\lambda x \in E_n(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ en $x \in E_n(\mathbb{R})$

Neem een willekeurige $\lambda \in \mathbb{R}$ en $x \in E_n(\mathbb{R})$.

~~$\lambda(x) = (\lambda x) = \lambda(x) = \lambda$~~ $\quad x(t) = x(-t)$

$(\lambda x)(t) = \lambda(x(t)) = \lambda(x(-t)) = (\lambda x)(-t)$

Hiermee is ③ aangetoond

$E_n(\mathbb{R})$ is dus een deelruimte van $E_n(\mathbb{R})$.

d Neem $n=6$. Bepaal een basis van $E_6(\mathbb{R})$.

$E_n(\mathbb{R})$ bestaat alleen uit even polynomen (het verschil tussen $P(x)$ en $P(-x)$ is altijd even). De monoom x^{2n} is ook altijd even.

Dus een basis van $E_6(\mathbb{R})$ is $\beta = \{1, x^2, x^4, x^6\}$

e Bepaal de dimensie van $E_6(\mathbb{R})$

$\dim(E_6(\mathbb{R})) = \#\{1, x^2, x^4, x^6\} = 4$

24

2 a $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \quad T(a_1, a_2, a_3) := (a_2, -a_1, 2a_3)$

Bepaal de matrix T ten opzichte van de standaardbasis $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ van $\mathbb{C}^3$

$T(1,0,0) = 0, -1, 0$
$T(0,1,0) = 1, 0, 0$
$T(0,0,1) = 0, 0, 2$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Bepaal of T een isomorfie is. (Toon aan)

Toon aan ① T is een lineaire afbeelding.
② T is inverteerbaar.

Bewijs ①. a) $T(a+b) = T(a) + T(b)$
b) $T(\lambda a) = \lambda T(a)$.

a) Neem willekeurige a en b uit T : $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$T(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) = (a_2+b_2, -(a_1+b_1), 2(a_3+b_3))$
$= (a_2+b_2, -a_1-b_1, 2a_3+2b_3)$
$= \cancel{T(a_1, a_2, a_3}\ (a_2, -a_1, 2a_3) + (b_2, -b_1, 2b_3)$
$= T(a) + T(b)$. Hiermee is a) aangetoond.

b) Neem willekeurige $\lambda \in \mathbb{C}$ en $(a) \in T$

$T(\lambda a) = (\lambda a_2, -\lambda a_1, 2\lambda a_3)$
$= \lambda (a_2, -a_1, 2a_3) = \lambda T(a_1, a_2, a_3) = \lambda T(a)$.

Hiermee is b) aangetoond dus T is een lineaire afbeelding. vervolg b) z.o.z.

~~Bepaal het karakteristieke polynoom van T~~

$$\cancel{T = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

② Bewijs T is inverteerbaar.
T is inverteerbaar als T bijjectief is. oftewel
T is injectief of surjectief.
$T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ Hieruit volgt dat de dimensies gelijk zijn.
~~nu moeten we ... al.~~ Dit heeft als gevolg dat we
één ~~van~~ beide moeten aantonen (surjectief of injectief)

$$T(a_1 a_2 a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

–1 injectief: ? $\cancel{T(0,0,0)} \Leftrightarrow -a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge 2a_3 = 0$

$T_?(0,0,0) \Leftrightarrow (0,0,0)$

wat zeg je hiermee conclusie T is injectief dus bijjectief.

Conclusie: T is een lineaire ~~of~~ afbeelding die inverteerbaar is. Dus T is een isomorfie.

c) Bepaal het ~~de~~ karakteristieke polynoom van T.

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (-1)^2 - \lambda\left[\left(-\lambda \cdot (2-\lambda)\right) - 0\right] + (-1)^3 \cdot (1)\left[\left(-1 \cdot (2-\lambda)\right) - 0\right] + (-1)^4 \cdot (0)[\ldots]$$

$$P_\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda) + -(\lambda - 2) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

d) Bereken de eigenwaarden van T

$\cancel{-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0}$ $\quad -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

–2

$\lambda = 2$ is de eigenwaarde van T. $\lambda = i$

$\lambda = -i$

e Bepaal een basis van $\mathbb{C}^3$ zodat de matrix T ten opzichte van β een diagonaalmatrix is.
$\dim(\mathbb{C}^3) = 3$
We hebben dus 3 onafhankelijke factoren nodig.

–6 $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$?

13

3 a $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bepaal de rang van A.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_2 \to r_2 - 2r_1}{=} \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k_3 \to k_3 + k_1}{\overset{k_2 \to k_2 - 2k_1}{=}} \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{k_4 \to k_4 - 3k_1}{=} \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

b Bepaal de dimensie van de nulruimte $N(A)$ van A

Dimensie stelling $\quad \dim(A) = \dim(N(A)) + \text{rang}(A)$

$\dim(A) = 4 \quad \Rightarrow \quad \dim(A) - \text{rang}(A) = 4 - 3 = 1 = \dim(N(A))$

c Bepaal de oplossingsverzameling van het homogene stelsel $Ax = 0$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_2 \to r_2 - 2r_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_1 + r_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r_1 \to r_1 - 2r_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

Neem een willekeurige $a \in \mathbb{R}$ voor x_4.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = a \\ x_2 = -2a \\ x_3 = 0 \\ x_4 = a \end{array}$$

Dan is de oplossingsverzameling

$$\Rightarrow V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$$

d Laat de vector b gegeven zijn door $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $Ax = b$.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{r_2 \to r_2 - 2r_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{r_1 \to r_1 + r_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \overset{r_1 \to r_1 - 2r_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_4 = 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 3 + x_4 \\ x_2 = 3 - 2x_4 \\ x_3 = 1 \\ \cancel{x_4 = x_1 - 3} \end{array}$$

Neem een willekeurige $a \in \mathbb{R}$ voor x_4.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 + a \\ x_2 = 3 - 2a \\ x_3 = 1 \\ x_4 = a \end{array}$$

22

De oplossingsverzameling V_2

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3+a \\ 3-2a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

4 a Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

$T: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow M_{n\times n}(\mathbb{R})$
$T(M) := M^t$

Toon aan: ① $T(M+M') = T(M) + T(M')$
② $T(\lambda M) = \lambda T(M)$

Bewijs ① $M = \{m_{ij}\}_{ij}$ $M' = \{m'_{ij}\}_{ij}$ willekeurig uit $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
$T(M+M') = T(\{m_{ij}\}_{ij} + \{m'_{ij}\}_{ij}) =$
$= T(\{m_{ij} + m'_{ij}\}_{ij}) = \{m_{ji} + m'_{ji}\}_{ij} = \{m_{ji}\}_{ij} + \{m'_{ji}\}_{ij}$
$= T(M) + T(M')$
Hiermee is ① Bewezen

② Neem willekeurige $\{m_{ij}\}_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ en $\lambda \in (\mathbb{R})$.
$T(\lambda M) = T(\lambda\{m_{ij}\}_{ij}) = T(\{\lambda m_{ij}\}_{ij}) =$
$\{\lambda m_{ji}\}_{ij} = \lambda\{m_{ji}\}_{ij} = \lambda T(M)$
Hiermee is ② Bewezen.

Uit deze twee bewijzen volgt dat T een lineaire afbeelding is.

b Toon aan dat T slechts twee eigenwaarden heeft, namelijk 1 en -1
Neem een willekeurige $\lambda \in (\mathbb{R})$.
$T(M) = \lambda M$
$T(M) = M^t$ $T(T(M)) = M = T(\lambda M) = \lambda^2 M$
dus $\lambda^2 = 1$ daaruit volgt $\lambda = 1$ of $\lambda = -1$
Hiermee is aangetoond dat $\lambda = 1$ en $\lambda = -1$ de eigenwaarden zijn.

c Geef een beschrijving van de eigenruimten behorend bij deze eigenwaarde.
① voor $\lambda = 1$ $M^t = \lambda M = M$.
Dit geldt voor alle symmetrische matrices
② voor $\lambda = -1$ $M^t = -M$
Dit geldt voor alle antisymmetrische matrices

d Neem $n=2$ Bepaal een geordende basis β van $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zodanig dat $[T]_\beta$ een diagonaal matrix is.

$\dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = n^2 = 4$ ~~uit c) blijkt dat~~

Uit c blijkt dat we drie onafhankelijke vectoren nodig hebben.

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

-5

$\dim M_{2\times 2} = 4$

17